

Della rifrazione e della riflessione totale ionosferica

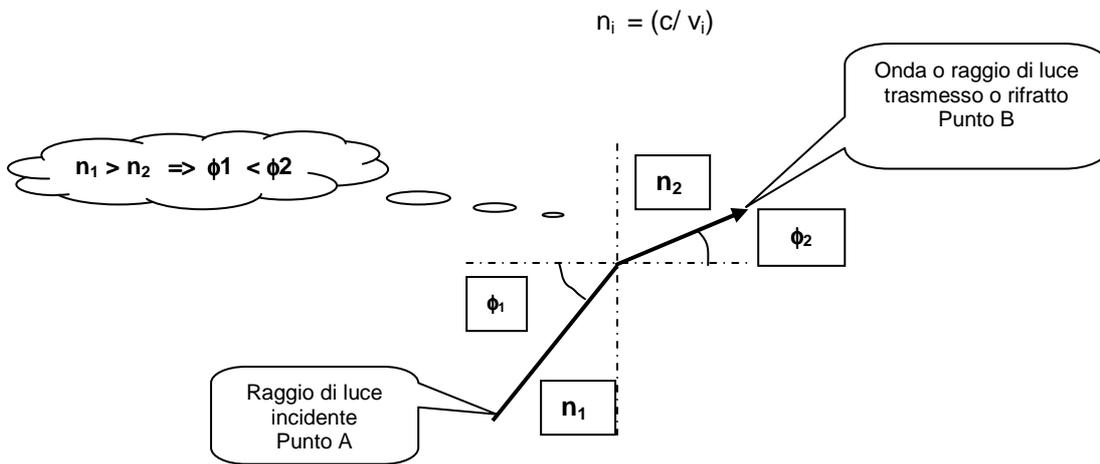
Il testo principale: "Jonoteoria e instabilità" menziona in modo succinto la rifrazione e la riflessione totale di un'onda elettromagnetica nella ionosfera. Questo modesto lavoro si propone da un lato di spiegare la rifrazione continua subita dall'onda incidente nel plasma freddo ionosferico. Dall'altro di spiegare come, quando e perché un'onda rifratta può piegare verso terra oppure "bucare" la ionosfera perdendosi nello spazio.

Bisogna chiarire che i due fenomeni trovano applicazione pratica. Il primo è la base delle comunicazioni in onde medie e corte per onda spaziale. Il secondo è la: "Conditio sine qua non", sia delle comunicazioni satellitari, astronautiche in onde ultracorte e microonde (satelliti artificiali e sonde spaziali roteano ad altezze ben oltre la ionosfera). Sia della radioastronomia basata sulla ricezione dei segnali elettromagnetici galattici e intergalattici..

1. La rifrazione ottica:

La rifrazione è un fenomeno per il quale un raggio di luce percorrente un medio (esempio aria) ad una certa velocità e sotto un certo angolo d'incidenza ϕ_1 all'uscita, penetrando in un nuovo medio a maggiore o minore densità, frenerà o accelererà riducendo o aumentando l'angolo d'incidenza.

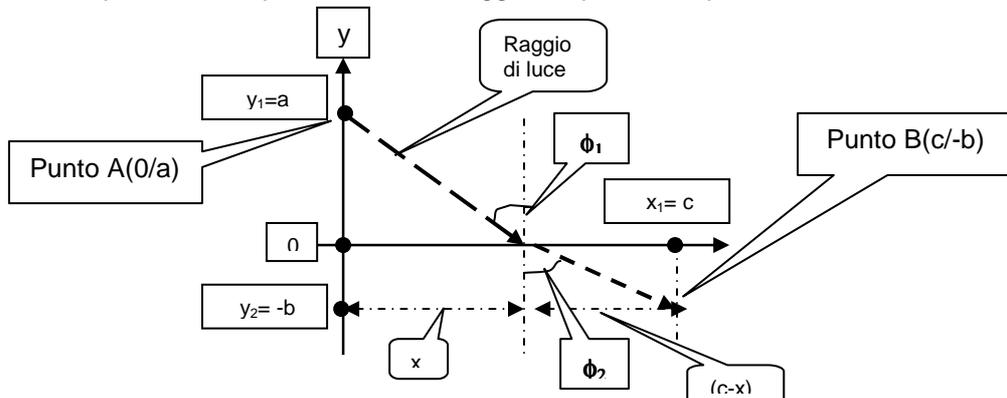
In pratica, alla velocità di propagazione si preferisce l'indice di rifrazione n_i , definito per ogni singolo materiale trasparente dal rapporto fra velocità della luce nel vuoto $c = 300.000 \text{ km/sec}$ e velocità v_i nel corpo



Il fenomeno è retto dal teorema della rifrazione:

" Il prodotto fra l'indice d'incidenza n_1 e il seno dell'angolo d'incidenza ϕ_1 è uguale al prodotto fra l'indice di trasmissione n_2 per il seno dell'angolo di trasmissione ϕ_2 ".

La dimostrazione matematica del teorema della rifrazione è piuttosto complessa. In sintesi, si chiede di trovare il tempo minimo di percorrenza del raggio dal punto a al punto c.



Si considerino i punti A = (0/a) d'entrata del raggio di luce nel primo medio e B = (c/-b) d'uscita dal secondo e le loro coordinate cartesiane.

Si consideri altresì la proiezione del tratto percorso dal raggio all'interno del primo medio uguale a x e la proiezione del secondo tratto uguale a (c-x). Si calcoli la somma **t (x)** dei tempi di percorrenza dal raggio entro i due media **t₁ (x)** e **t₂ (x)** alle velocità di propagazione **v₁** e **v₂**:

$$t(x) = t_1 + t_2 = \{[(a)^2 + (x)^2]^{1/2} / v_1\} + \{[(b)^2 + (c - x)^2]^{1/2} / v_2\}$$

I possibili percorsi del raggio di luce funzione di x, attraverso i due media sono infiniti, ma il principio di Fermat insegna che un'onda si propaga sempre lungo il tragitto più breve. Ne consegue la necessità di trovare il **valore minimo della somma dei tempi** di percorrenza calcolando la prima derivata della funzione t(x): **dt(x)/dx** e uguagliandola a zero al fine di trovare il valore della variabile corrispondente al minimo della funzione (t'(x) = 0). In altre parole, il percorso più breve secondo Fermat :

$$(dt/dx) = \{1/v_1 [2x / [(a)^2 + (x)^2]^{1/2}]\} + \{1/v_2 [(-2(c-x)) / [(b)^2 + (c-x)^2]^{1/2}]\} = 0$$

dividendo ambo i termini dell'equazione per 2 si ottiene:

$$(dt/dx) = \{[1/(2v_1)] * [2x / [(a)^2 + (x)^2]^{1/2}]\} + \{[1/(2v_2)] * [(-2(c-x)) / [2[(b)^2 + (c-x)^2]^{1/2}]]\} = 0$$

$$(dt/dx) = \{[1/v_1] * [x / [(a)^2 + (x)^2]^{1/2}]\} + \{[1/v_2] * [-(c-x) / [(b)^2 + (c-x)^2]^{1/2}]\} = 0$$

essendo $[x / [(a)^2 + (x)^2]^{1/2}] = \text{sen } \phi_1$ e $[-(c-x) / [(b)^2 + (c-x)^2]^{1/2}] = \text{sen } \phi_2$ si può scrivere

$$[\text{sen } \phi_1 / v_1] - [\text{sen } \phi_2 / v_2] = 0$$

da cui il teorema della rifrazione dipendente dalle velocità del raggio:

$$v_2 \text{sen } \phi_1 = v_1 \text{sen } \phi_2$$

in fine sostituendo le velocità con l'indice di rifrazione $n_i = (c / v_i)$ si ottiene:

$$\boxed{n_1 \text{sen } \phi_1 = n_2 \text{sen } \phi_2} \quad [1]$$

Quod erat demonstrandum.

Un famoso esempio di rifrazione ottica, diletto di tutti i bambini, si ha immergendo in una bacinella d'acqua o in un laghetto tranquillo un bastone leggermente inclinato rispetto alla verticale. Con sorpresa il pezzo del bastone immerso sembrerà piegarsi verso l'alto, tanto da far dire di **una profondità apparente** rispetto a quella reale della bacinella

La spiegazione del fenomeno è abbastanza semplice. La luce percorre nell'aria nell'intervallo Δt a velocità **v_{aria}**, un certo spazio $\Delta s_{\text{aria}} = (v_{\text{aria}} * \Delta t)$ che darà all'osservatore una certa impressione di distanza.

Lo stesso raggio di luce nell'acqua: frenato dalla maggiore densità molecolare (H₂O), percorrerà nell'intervallo Δt uno spazio minore $\Delta s_{\text{acqua}} = (v_{\text{acqua}} * \Delta t)$ e l'osservatore trarrà l'impressione che il pezzo di bastone immerso sia più vicino e si pieghi verso l'alto. La differenza fra profondità apparente e reale è data dal rapporto fra gli indici di rifrazione:

$$h_{\text{virtuale}} = h_{\text{reale}} (n_1/n_2)$$

Si conclude pertanto che la rifrazione ottica sarà tanto maggiore, quanto maggiore sarà la densità del mezzo. Che la velocità **v_i** di propagazione della luce nel medio **i** e l'indice di rifrazione **n_i** sono una funzione inversa della densità.

2. La ionosfera

L'annuncio di Marconi di voler collegare radiotelegraficamente l'Europa all'America del nord scisse il mondo scientifico d'allora in due fazioni. I pessimisti, discepoli ortodossi della teoria maxwelliana della propagazione

lineare. Gli ottimisti, progressisti pragmatici, che rifacendosi all'esperienza marconiana sostenevano la loro curvatura.

Il successo di Marconi che sembrava rimettere in discussione la teoria elettromagnetica, ebbe al contrario il pregio di riproporre l'ipotesi formulata da Heaviside sulla possibile esistenza in quota di uno strato elettrico riflettente, che metteva d'accordo ortodossi e progressisti.

2.1 La densità elettronica della ionosfera

Le molecole e gli atomi d'aria colpiti dalla radiazione solare visibile e invisibile si scindono in ioni ed elettroni liberi. La densità elettronica N (quantità d'elettroni liberi per metro cubo, e/m^3) in un certo punto della ionosfera e in un dato momento è una funzione continua, non lineare della rarefazione dell'aria e dall'intensità della radiazione solare (visibile e non) al crescere dell'altezza.

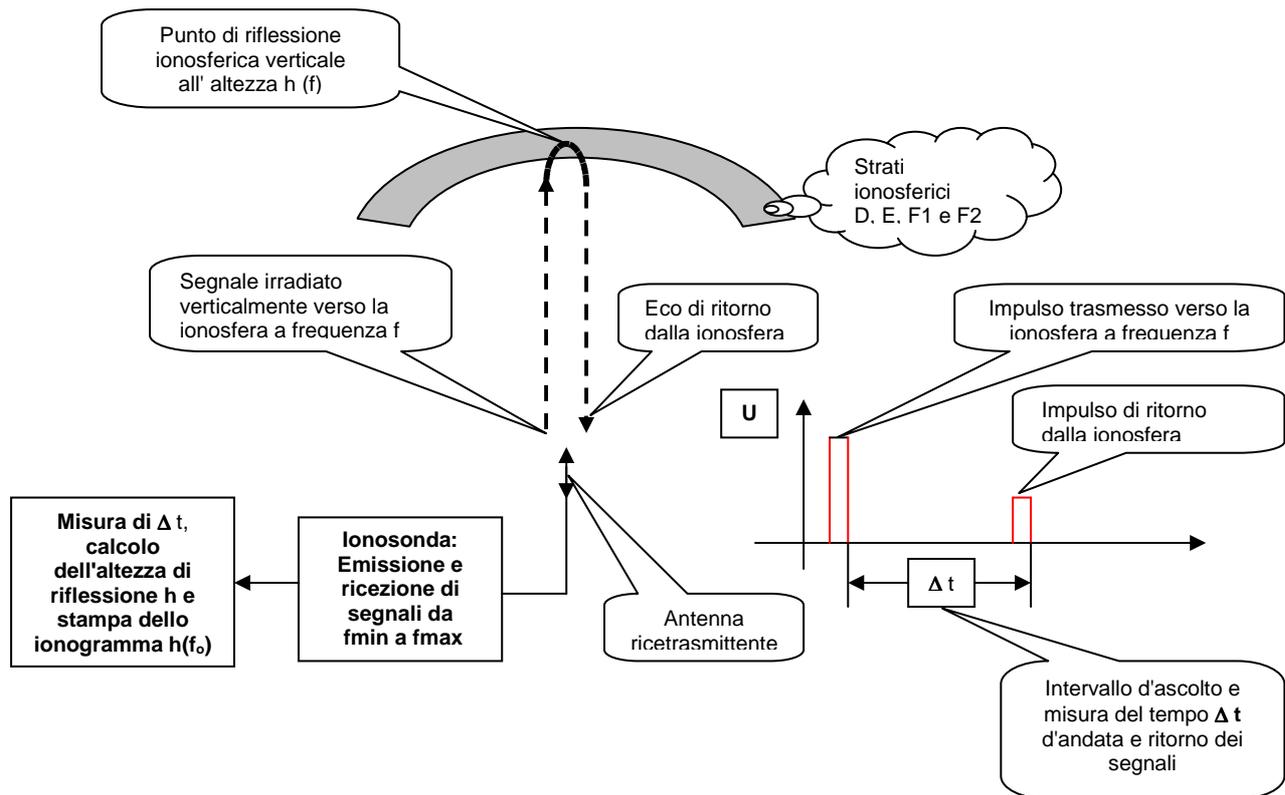
L'unico modo per conoscere direttamente la densità elettronica della ionosfera sta nel misurarla con satelliti a bassa quota che l'attraversano.

Il metodo indiretto, antico, ma sempre valido, sta nell'irradiare verticalmente da una: "**Ionosonda**" una serie di segnali radio a frequenze crescenti e, se riflessi, misurare i tempi d'andata e ritorno. Lo spazio percorso è per definizione $s = v t$. Sostituendo v con c : velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto 300.000 km/sec (nell'aria è di poco inferiore) e dimezzando i tempi d'andata e ritorno, si ottiene per l'altezza $h(f)$ (punto di riflessione ionosferica) la relazione

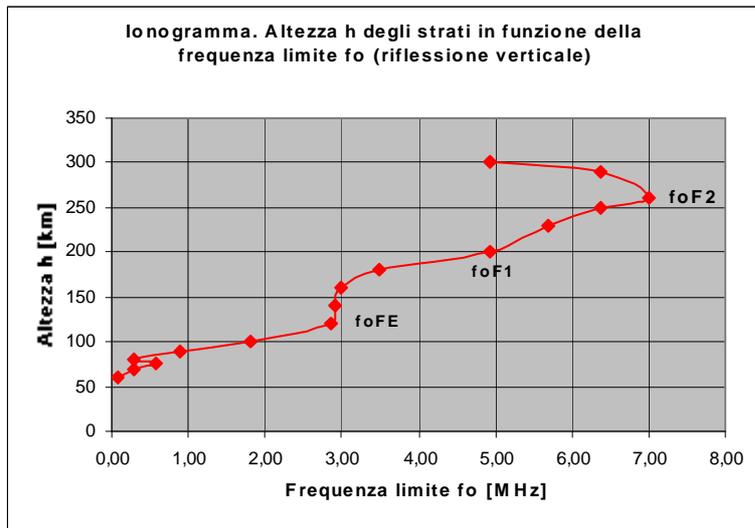
$$h(f) = v t = c \cdot (\Delta t/2)$$

rappresentabile graficamente in uno: "Ionogramma".

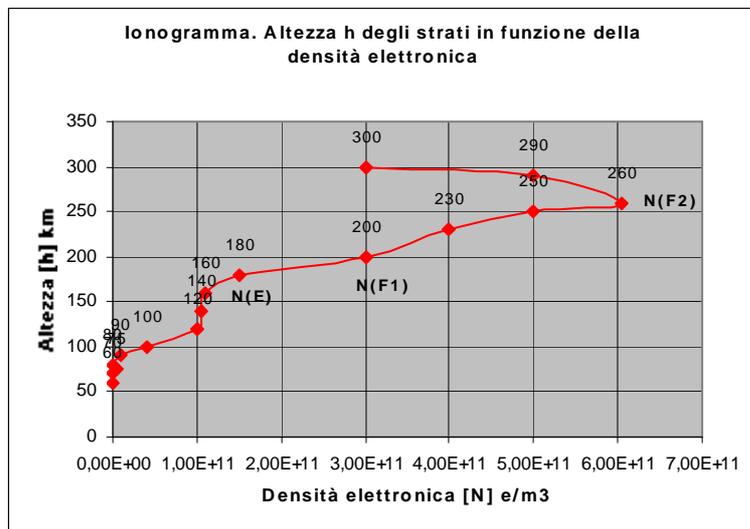
Le ionosonde irradiano verso la ionosfera una serie d'impulsi alle varie frequenze ogni tre minuti, ricevono gli echi ionosferici, misurano i tempi di percorrenza e calcolano le altezze $h(f)$.



L'ascissa di ogni ionogramma, come ad esempio nel prossimo grafico, è di regola tarata in frequenza $h(f)$, ma si lascia facilmente trasformare in densità elettronica, come si dimostrerà più avanti nel testo.



Lo ionogramma precedente rappresenta l'andamento medio giornaliero (notturno escluso) dell'altezza in funzione della densità elettronica $h(f)$ durante un generico ciclo d'attività solare minima (un ciclo dura circa undici anni), mentre il prossimo ha l'ascissa tarata in densità elettronica $h(N)$



La densità elettronica è espressa in notazione esponenziale (potenze di 10). Esempio $4,00E+11 \text{ e/m}^3$ corrisponde a $4,00 \cdot (10)^{11} \text{ e/m}^3$ oppure $400.000.000.000 \text{ e/m}^3$.

2.2 La rifrazione ionosferica all'interno degli strati e la riflessione totale

La rifrazione ionosferica è identica a quell'ottica. Unica differenza, in ottica la velocità della luce è frenata dalla struttura atomica dei materiali. Nella ionosfera è ridotta dalla densità elettronica N . La costante di trasmissione di un'onda elettromagnetica è proporzionale alla radice quadrata del prodotto della costante dielettrica per la permeabilità: $\gamma \sim (\epsilon \mu)^{1/2}$ con $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$. Considerando in prima approssimazione solo l'elemento del campo elettrico E si definisce l'indice di rifrazione ionosferico

$$n_i = (\epsilon)^{1/2} \quad [2]$$

Inserendo la [2] nella [1] si può scrivere:

$$(\epsilon_1)^{1/2} \sin \phi_1 = (\epsilon_2)^{1/2} \sin \phi_2$$

anche se in generale per evitare confusione si preferisce utilizzare la [1] con gli indici di rifrazione ionosferici:

$$n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin \phi_2 \quad [1]$$

L'indice di rifrazione ennesimo n_i è definito dalla relazione:

$$n_i = [1 - (81 \cdot N_i / f^2)]^{1/2} = \text{sen } \phi_i \quad [3]$$

funzione che può assumere tutti i valori all'interno dell'intervallo: $0 \leq n_i \leq 1$.

Si consideri la coltre ionosferica attorno alla terra approssimativamente sferiforme e si calcoli per $n_i = 0$:

$$\text{sen } \phi_i = n_i = [1 - (81 \cdot N_i / f^2)]^{1/2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = (81 \cdot N_i / f^2)$$

e risolvendo in f si trova

$$f = 9 (N)^{1/2}$$

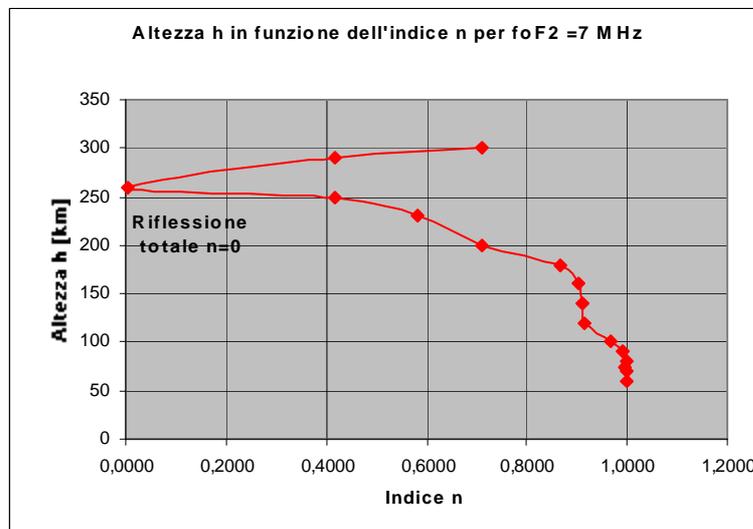
Porre l'indice di rifrazione n_i uguale a 0 significa: $\text{sen } \phi_i = 0$ e $\phi_i = 0^\circ$. In altre parole irradiare verticalmente verso la ionosfera alla frequenza f , funzione del particolare valore di densità elettronica N nel luogo e nel momento in cui il segnale emesso verticalmente, riflesso totalmente dalla ionosfera, torna verso terra. Oltre questa frequenza detta **frequenza critica o frequenza limite** f_o , il segnale buca lo strato e sale oltre.

Si potrà pertanto scrivere

$$f_o = 9 (N_o)^{1/2} \quad [4]$$

Formula che risolta in N rende possibile trasformare l'ascissa dello ionogramma $h(f_o)$ in $h(N_o)$

L'indice di rifrazione n_i diminuisce al salire dell'altezza. Rifacendosi allo ionogramma $h(N)$ precedente e per una frequenza limite dello strato F_2 , $f_o F_2$ di **7MHz** si è provveduto a calcolare e rappresentato graficamente la funzione $h(n_i)$:



Si considerino due densità elettroniche contigue N_1 e N_2 . Per $n_1 > n_2$ un'onda incidente nella ionosfera sotto un certo angolo verrà rifratta verso il basso. Salendo in quota l'indice di rifrazione n calerà in continuazione fino a $n = 0$. A quest'altezza l'onda si disporrà orizzontalmente avendo raggiunto il punto di **riflessione totale**.

Si consideri un'onda, che abbia raggiunto il punto di riflessione totale e proceda lungo la propria traiettoria orizzontale per un tratto molto piccolo verso destra. Essa intersecherà superfici di livello N a maggior densità elettronica e indici di rifrazione n sempre minori. Si applichi la [1]:

$$n_1 \text{ sen } \phi_1 = n_2 \text{ sen } \phi_2$$

Si consideri ora $N_2 = (N_1 + \Delta N)$ con ΔN pari a un incremento piccolissimo di densità elettronica e $\phi_1 = 90^\circ$. Essendo $\text{sen}(90^\circ) = 1$ si può scrivere:

$$n_1 / n_2 = \text{sen}(\phi_1)$$

sostituendo:

$$[N_1 / (N_1 + \Delta N)] = \text{sen}(\phi_1 - \Delta\phi)$$

d'altra parte:

$$\text{sen}(\phi_1 - \Delta\phi) = (\text{sen} \phi_1 * \cos \Delta\phi) + (\cos \phi_1 * \text{sen} \Delta\phi)$$

Per $\phi_1 = 90^\circ$ si otterrà:

$$\text{sen}(\phi_1 - \Delta\phi) = (1 * \cos \Delta\phi) + (0 * \text{sen} \Delta\phi) = \cos \Delta\phi$$

e in fine:

$$\cos \Delta\phi = [N_1 / (N_1 + \Delta N)] = \{1 / [1 + (\Delta N / N_1)]\}$$

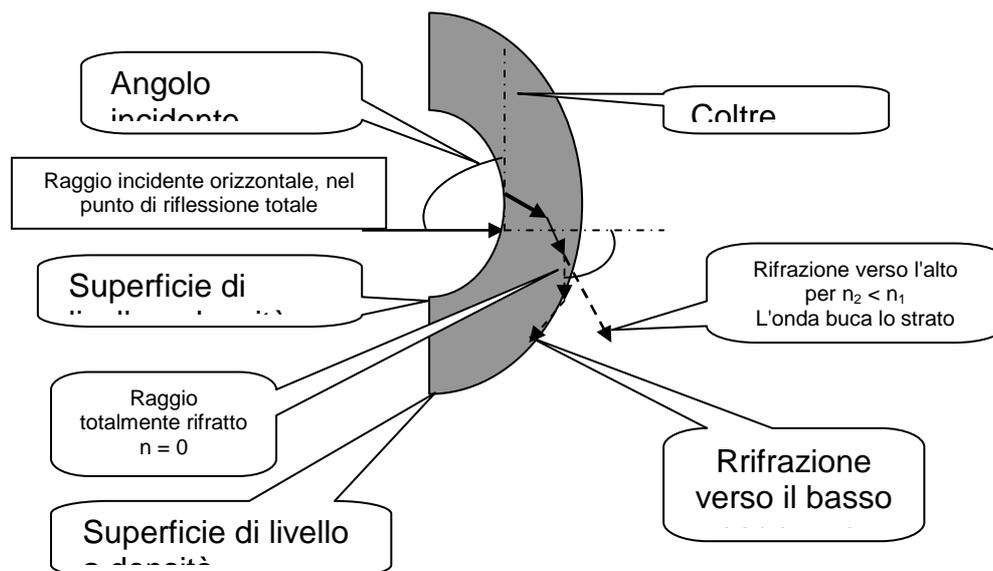
L'angolo di rifrazione dell'onda sarà:

$$\Delta\phi = \text{arc cos} = \{1 / [1 + (\Delta N / N_0)]\} \quad [5]$$

Si faccia un esempio pratico. Si assuma arbitrariamente la densità elettronica della superficie di livello che ha rifratto il raggio in riflessione totale $N_1 = 1$. Si supponga che il raggio l'attraversi perpendicolarmente raggiungendo la superficie adiacente di densità elettronica superiore del 1 o/ooo. Ne consegue:

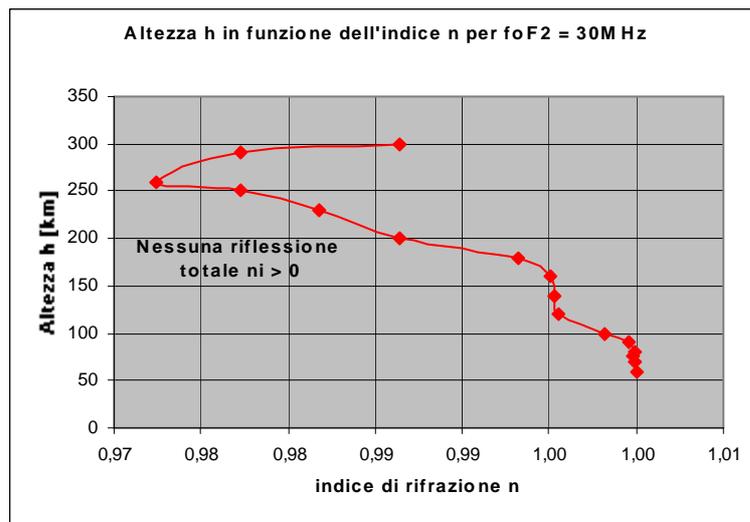
$$\Delta\phi = \text{arc cos} \{1/[1+ (0,001/1)]\} = 2,56^\circ$$

Come si dimostra: un'onda che raggiunto il punto di riflessione totale continui orizzontalmente dopo un brevissimo percorso verrà piegata verso gli strati inferiori iniziando il suo ritorno verso terra.



2.3 La rifrazione ionosferica con attraversamento degli strati

Si consideri un'onda incidente nella ionosfera ad una frequenza di 30 MHz, notevolmente superiore alla frequenza critica: f_oF_2 7MHz, dello ionogramma utilizzato. Si ricalcoli l'indice di rifrazione per questa nuova frequenza e si rappresenti graficamente:



L'indice di rifrazione non raggiunge il valore $n = 0$. L'onda parzialmente rifratta non si disporrà mai orizzontalmente. Giunta al limite degli strati abbandonerà la ionosfera continuando nello spazio.

3. Il terzo incomodo: il campo magnetico

Condicio sine qua non per una corretta riflessione totale, è la stabilità geometrica e della densità elettronica lungo le equisuperfici ionosferiche sovrapposte (uno strato può essere suddiviso in equisuperfici). Una modifica della loro forma e/o altezza causa una ricaduta dell'onda dietro o davanti il punto di ricezione (antenna). Fenomeno rilevato in Ravenna nei mesi estivi 2008, periodo con macchie solari R quasi zero. Misurando alle 07ut00 i segnali delle stazioni di Ulm DK1NL a 550 km di cerchio massimo e di Amburgo DK2NV circa 1000 km, al crescere di Ulm calava Amburgo e viceversa.

La teoria della rifrazione così come spiegata si fonda sulla presunta assenza nella ionosfera di qualsivoglia campo magnetico. In realtà essa è percorsa sia dall'instabile campo magnetico terrestre, come da quello altrettanto instabile della magnetosfera. Il terzo incomodo. Tutto dedito a catturare elettroni liberi della ionosfera e ad orientarli lungo le linee di forza, alterando forma e indici di rifrazione delle equisuperfici. A sottrarre pezzi di plasma ionosferico da inviare nello spazio.

Così non è assolutamente scontato che lo ionogramma e la foF2 di Rügen siano uguali in Ulm e Ravenna. Anche per il fatto perché la latitudine delle tre località è differente.

Esaminando le registrazioni dei segnali di Ulm in Ravenna ci siamo presto accorti che qualche cosa nella teoria delle frequenze critiche non quadrava.

Si supponga una distanza di 550km, un'altezza della foF2 alle 07ut00, di 200 km, una frequenza di lavoro f_{lav} di 7033 kHz, un semiangolo al centro $\theta/2 = 2,5^\circ$ e un angolo d'incidenza $\Phi = 53^\circ$. La foF2 e gli angoli di radiazione Δ_0 , teorici (antenne di trasmissione e ricezione), necessari per raggiungere Ravenna sono:

$$\Delta_0 = [\pi/2 - (\theta/2 + \Phi)] = [90^\circ - (2,5^\circ + 53^\circ)] = 34,5^\circ$$

$$foF_2 = (f_{lav} \cos \Phi) = (7,033 \cdot 0,6018) = 4,23 \text{ MHz}$$

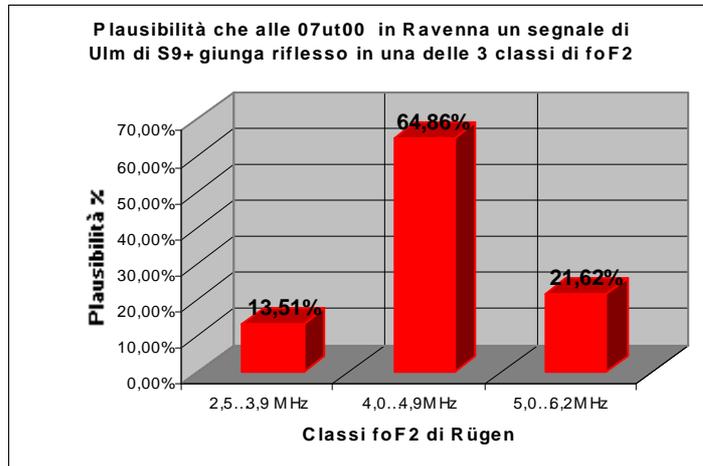
A questo punto ci siamo posti qualche domanda. Si supponga che la foF2 4,23 MHz sia realmente la frequenza limite per collegare Ulm con Ravenna sulla frequenza di lavoro 7033 kHz. Per quale ragione con una foF2 attorno a 3 MHz a volte sulla 7033 kHz sono stati ricevuti segnali ottimi; altre volte si è dovuto ripiegare sulla frequenza di riserva 3518 kHz, molto vicina alla foF2 di 3 MHz, ma con segnali inferiori; altre volte è stato ricevuto nessun segnale?

L'angolo teorico di radiazione Δ per una foF2 di 3 MHz e una frequenza di lavoro 3518 kHz è 28° . Valore caratteristico delle antenne a basso angolo di radiazione, quali: le yagi, le rombiche, le log periodiche e le verticali (con piano di terra ideale), particolarmente adatte a collegamenti ionosferici a lunga distanza. Angolo sicuramente inferiore a quello caratteristico di un buon dipolo mezz'onda, attorno ai 40° , come in questo caso. Sicuramente ben inferiore all'angolo di un dipolo mezz'onda molto vicino al terreno ($h < \lambda/4$) a radiazione quasi verticale, com'è spesso il caso in campo amatoriale.

Ne consegue, che $\Delta = 28^\circ$ è troppo basso per generare in Ravenna segnali di $40 \text{ dB}\mu$ e che incidenza e foF2 in Ravenna devono essere maggiori.

Stante questa situazione si è pensato di studiare il fenomeno del terzo incomodo analizzando statisticamente 136 collegamenti sulla frequenza di 7033kHz delle ore 07ut00 fra Ulm (DK1NL, Potenza 100 Wout e antenna a dipolo) e Ravenna (ik4/HB9AD/p, antenna ground plane) in periodi alterni da metà luglio 2006 a fine agosto 2008.

Base d'analisi: la foF2 di Rügen trasmessa a intervalli di 10 minuti dalla stazione DK0CWY sulla frequenza di 10144 kHz e un livello di segnale di $\geq 40 \text{ dB}\mu$ (S9+).



Volendo semplificare il problema si sono accorpate le foF2 in tre classi. Classe1: 2,5 ...3,9 MHz. Classe 2: 4,0 ... 4,9 MHz. Classe 3: 5,0 ... 5,9 MHz. Applicando il teorema di Bayes si ottiene:

La plausibilità che un segnale scelto a caso fra quelli emessi in Ulm alle ore 07ut00 su 7033 kHz, generi sul ricevitore in Ravenna una tensione $\geq 40 \text{ dB}\mu$ (S9+) tale, perché riflesso totalmente con una foF2 appartenente alla:

- a) Classe 1 (2,5...3,9 MHz) è del 13,51% ~ 14%
- b) Classe 2 (4,0...4,9 MHz) è del 64,86% ~ 65%
- c) Classe 1 (5,0...6,2 MHz) è del 22,62% ~ 23%

La plausibilità del 14% della classe 1, dimostra che la probabilità di ricevere segnali in Ravenna riflessi con foF2 in Rügen della classe 1 è minima. Il fenomeno si può solo spiegare ipotizzando che lungo la tratta, se non già in Ulm, la foF2 fosse maggiore di quella misurata in Rügen. Ciò che è sempre possibile

La plausibilità del 65% della classe 2, conferma sia la foF2 teorica di 4,2 MHz sia per collegare Ravenna da Ulm la frequenza limite deve situarsi nell'intervallo 4...5 MHz. Salvo si voglia ipotizzare una poco probabile riflessione totale sullo strato E, oppure una propagazione a 2 o più salti. Sempre possibile con antenne ad alto angolo di radiazione.

La plausibilità del 22% della classe 3 con foF2 superiori alla teorica si spiega rifacendosi al calcolo della probabilità a posteriori. La probabilità P che l'evento E: segnale $\geq 40 \text{ dB}\mu$ (S9+), sia vero se è vera l'ipotesi che appartiene alla classe 3. La $P = (E \mid \text{Classe 3})$ uguale al 100% conferma sia l'ipotesi sia l'ipotesi, ma conferma anche la possibilità di collegarsi a frequenze di lavoro superiori alla banda 7 MHz ad esempio in banda 10 MHz.

Il fatto che la plausibilità della classe 3 sia solo il 22 %, è frutto della bassissima attività solare del minimo degli 11 anni, che ha fatto in modo che raramente la foF2 delle ore 07ut00 di Rügen rientrasse nella classe 2.

Considerato che la plausibilità delle classi 2 e 3 sono reali, si può concludere che:

La plausibilità che un segnale scelto a caso fra quelli emessi in Ulm alle ore 07ut00 su 7033 kHz, generi sul ricevitore in Ravenna una tensione $\geq 40 \text{ dB}\mu$ (S9+), tale perché riflesso totalmente con una foF2 adatta al collegamento è dell'86%.

Da ultimo si osserva che la scelta della tensione al bocchettone del ricevitore $\geq 40 \text{ dB}\mu$ è stata il risultato sia dell'analisi dei dati giornalieri registrati, sia del calcolo della tensione **mediana** teorica al ricevitore verificata sperimentalmente.

Concludendo: volendo azzardare previsioni è bene tenere conto del terzo incomodo. Mai fare i conti senza l'oste.